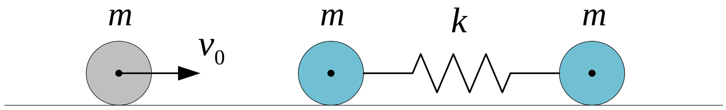
【Exercise 9】　－反発係数と内部エネルギー－

図のように，滑らかな水平面上にばね定数 k の質量を無視できるばねでつないだ質量 m の２つの球が静止している。そこに左遠方からから同じく質量 m の別の球が速さ v_0 で飛んできて，左側の球に衝突した。その衝突は瞬間的で完全弾性衝突であったとすると，衝突後それぞれの物体はどのような運動をするか？　また，ばねでつないだ２つの球を一つの物体と見なしたとき，それと飛んできた球との間の反発係数はいくらか？



＜ 解答 ＞

飛んでくる球，ばねの左端の球，右端の球をそれぞれ 0,1,2 と番号を付ける。衝突後の速度にはダッシュをつけて，v'_0, v'_1, v'_2 などと表すことにする。

さて，衝突直後の運動を調べる。完全弾性衝突だから，運動量保存もエネルギー保存も成立する。

$$mv_0 = mv'_0 + mv'_1$$

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 = \frac{1}{2}mv'_0{}^2 + \frac{1}{2}mv'_1{}^2$$

第 1 式より，$v_0 - v'_0 = v'_1$，第 2 式は，$v_0{}^2 - v'_0{}^2 = v'_1{}^2$であるから，両者から，

$$v_0 + v'_0 = v'_1 \quad \rightarrow \quad (v'_1 - v'_0)/v_0 = 1$$

反発係数が 1 である式も出てくる。ここまで，丁寧に議論することなく，同じ質量の完全弾性衝突だから，計算しなくても，

$$v'_0 = 0,\ v'_1 = v_0$$

飛んできた球が止まり，代わりに1の球が v_0 を得ることは，明らかである。

さて，その後が問題である。衝突後のことだから，もうダッシュは付けないこととする。あらためて，初期状態は，

$$v_1 = v_0,\ v_2 = 0$$

である。2つの質点の中央にあるこの物体の重心x_Gについて考えると，その速度は，

$$\dot{x}_G = (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)/2 = v_G = (v_1 + v_2)/2 = v_0/2$$

である。衝突後は，この物体には外力が作用しないから，この重心は等速運動を続けることとなる。この2つの質点とばねを一つの物体と見たとき，この衝突過程の反発係数は，

$$(v'_G - v'_0)/(v_G - v_0) = (\frac{v_0}{2} - 0)/(0 - v_0) = -0.5$$

となる。

さて，重心とともに等速度運動する座標系でその後の運動を考える。重心との相対速度を $x_{\mathrm{r}1}, x_{\mathrm{r}2}$ ，とおくと，これらの質点の運動方程式は，半分の長さのばねにつけられた質点の運動であるから，

$$\frac{d^2x_{\mathrm{r}1}}{dt^2} = -2kx_{\mathrm{r}1} \quad , \qquad \frac{d^2x_{\mathrm{r}2}}{dt^2} = -2kx_{\mathrm{r}2}$$

初期条件は $t=0$ で，

$$x_{\mathrm{r}1} = 0,\ \dot{x}_{\mathrm{r}1} = v_0/2,\ x_{\mathrm{r}2} = 0,\ \dot{x}_{\mathrm{r}2} = -v_0/2$$

よって，

$$v_{\mathrm{r}1} = -v_{\mathrm{r}2} = \frac{v_0}{2}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t \quad , \quad x_{\mathrm{r}1} = -x_{\mathrm{r}2} = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t$$

したがって，右の物体は伸び縮み振動しながら，その重心は右へ等速運動する。

Exercise 6 の結果によれば，単振動の力学的エネルギーは，

$$\frac{1}{2}ma^2\omega^2$$

で与えられる。今の問題に適応すると，振動のエネルギーは2つの質点の合計で，

$$ma^2\omega^2 = m\left(\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}\right)^2\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\right)^2 = \frac{1}{4}m{v_0}^2 = \frac{E_0}{2}$$

である。一方，並進運動（重心の運動）のエネルギーは，

$$\frac{1}{2}2m{v_G}^2 = m\frac{{v_0}^2}{4} = \frac{1}{4}m{v_0}^2 = \frac{E_0}{2}$$

である。したがって，飛んできた球の運動エネルギー E_0 が，物体の重心の運動エネルギーと，物体内部の振動のエネルギー（内部エネルギー）に，ちょうど半分ずつ分配されたわけである。

ところで，2つの物体が衝突するとき，運動量は保存され，2つの物体の質量中心は等速度運動を続ける，したがって，反発係数 e は，衝突する2物体の相対運動のエネルギーの損失を規定する量である。

相対運動のエネルギーは，換算質量と相対速度をつかって，（次週解説する？）

$$\frac{1}{2}\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}(V_1-V_2)^2$$

と表現できる。したがって，損失エネルギーは，

$$\frac{1}{2}\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}\{(V_1-V_2)^2-({V'}_1-{V'}_2)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}\left\{1-\left|\frac{V'_1-V'_2}{V_1-V_2}\right|^2\right\}(V_1-V_2)^2=\frac{1}{2}\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}\{1-(-e)^2\}(V_1-V_2)^2$$

と，反発係数との関係として表現できる。

今の問題では，飛んできた物体（質量 m ，衝突前速度 v_0 ）と，2質点をばねでつないだ物体（質量 $2m$ ，衝突前速度0）において，これら全体の質量中心の速度と，その運動エネルギーは，

$$\frac{mv_0+2m\cdot 0}{m+2m}=\frac{v_0}{3}\ ,\quad \frac{1}{2}3m\left(\frac{v_0}{3}\right)^2=\frac{1}{6}m{v_0}^2=\frac{1}{3}E_0$$

で，これは変化しない。相対運動のエネルギーは，

$$\frac{1}{2}\frac{m\cdot 2m}{m+2m}(v_0-0)^2=\frac{1}{3}m{v_0}^2=\frac{2}{3}E_0$$

したがって，損失エネルギーは，上の関係式へ，前に求めた反発係数を入れると，

$$\frac{1}{3}m{v_0}^2\{1-e^2\}=\frac{1}{3}m{v_0}^2\{1-0.5^2\}=\frac{1}{4}m{v_0}^2$$

となって，たしかに振動のエネルギーと同じになる。

結局，最初に飛んできた物体の持っていた運動エネルギーのうち，系全体の質量中心運動のエネルギーは $1/3$ で，これは衝突後も維持される。一方，相対運動のエネルギーは，のこりの $2/3$ で，これは衝突後そのうちの $\{1-e^2\}=3/4$ ，すなわち全体の $2/3\times 3/4=\ 1/2$ 失われたのである（実際は失われたのではなく，物体の内部エネルギー（振動のエネルギー）に変化したのである）。失われていない相対運動のエネルギー $2/3\times 1/4=\ 1/6$ と保存されている系全体の質量中心運動のエネルギーは $1/3$ を加えると，$1/2$ となり，たしかに上で求めた2つの質点をばねでつないだ物体の並進運動のエネルギーと等しくなっている。

以上