

## 関連解説： - 慣性テンソルの座標変換 -

ある座標軸に対する慣性テンソルの各成分を求めるのは、座標軸が剛体の対称軸に一致しない限り、かなり面倒な計算となる。したがって、簡単に計算できる対称軸に対する慣性テンソルを求めて（直交する3つの対称軸をもつ剛体の場合、慣性テンソルの非対角成分である慣性乗積はゼロになる）、これを座標変換して、いま問題としている座標軸に対する慣性テンソルを求めるようにしたほうがずっと簡単である。

慣性テンソルは、以下のような行列で表現できる物理量である。

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

対角成分である慣性モーメントは、 $I_{xx} = \iiint \rho (y^2 + z^2) dx dy dz$  などの式で与えられる。一方、非対角成分である慣性乗積は、

$$I_{yz} = I_{zy} = - \iiint \rho yz dx dy dz$$

などで与えられるので、慣性テンソルは対称行列である。

さて、実対称行列は、実数の固有値をもち、それらに対応する固有ベクトルが互いに直交すること、ならびに、それらの固有ベクトルからなる行列（直交行列）によって対角化できることを知っている。その事情を式に書けば、対称行列  $A$  について、異なる3つの固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  があり、それらに対応する固有ベクトルが  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  であるとすれば、次式が成り立つということである。

$$\begin{cases} A \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \\ A \mathbf{e}_2 = \lambda_2 \mathbf{e}_2 \\ A \mathbf{e}_3 = \lambda_3 \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

これらをまとめれば、次のように表現できる。

$$A \{ \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \} = \{ \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ここで、 $\{ \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \}$  は、固有ベクトルを列ベクトルとする行列である。長さ1の固有ベクトルを用いることとすれば、これは直交行列となる。直交行列の逆行列は、単に転置するだけであるから、それを上の式の両辺にかければ、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{pmatrix} A \{ \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

となって、行列  $A$  が対角化できるわけである。

慣性テンソルに戻って、上で述べたことを考えてみよう。上の式は、当然、対称行列で表わされる慣性テンソルにおいても成立するから、固有値を  $I_1, I_2, I_3$  と書くことにすれば、

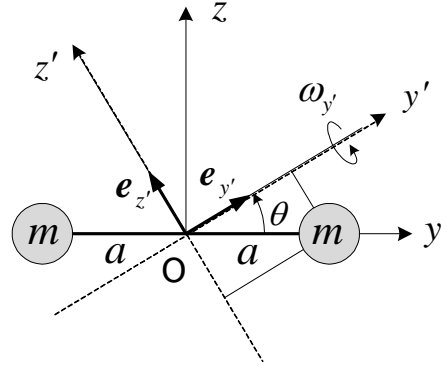
$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \{ \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

と表わすことができる。これは、慣性テンソルという対称行列の対角化を示すものであると同時に、

対称行列で表わされる物理量の一つである慣性テンソルの座標変換（xyz座標系から、慣性乗積がゼロとなる座標系への変換）を表現したのものともいえるのだ。このことについて、具体的な問題で考えてみることにしよう。

図に示すような、質量 $m$ の質点を距離 $2a$ でつないだ亜鈴形の物体について考える。xyz座標系におけるこの物体の慣性テンソルの各要素は、物体がy軸にそってあるから、次の通りであることは容易に理解できよう。（x軸は紙面に垂直、手前の方向とする。また、質点の大きさは考えない。）

$$\begin{cases} I_{xx} = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = 2ma^2 & I_{yz} = -\sum m_i y_i z_i = 0 \\ I_{yy} = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) = 0 & I_{zx} = -\sum m_i z_i x_i = 0 \\ I_{zz} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = 2ma^2 & I_{xy} = -\sum m_i x_i y_i = 0 \end{cases}$$



行列でかけば、次のとおりである、

$$I = \begin{bmatrix} 2ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2ma^2 \end{bmatrix}$$

いま、yz面内であってy軸と $\theta$ の角度をもつy'軸のまわりに、単位の大さの角速度を与えたとする（ $\omega = 1 \mathbf{e}_{y'} = \{0, \cos \theta, \sin \theta\}$ ）。このときの角運動量ベクトルは、xyz座標系において、

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}_{\omega=\mathbf{e}_{y'}} = \begin{bmatrix} 2ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2ma^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2ma^2 \sin \theta \end{Bmatrix}$$

となる。回すことを考えてしまうと変に思うかもしれないが、図の配置で、y'軸のまわりに角速度を与えた瞬間では、右の質点は奥へ $-x$ の方向に、左の質点は手前 $+x$ の方向に運動量を持つのみであるから、その瞬間はz軸まわりに角運動量をもつだけである。このxyz座標系で表わした角運動量ベクトルの成分をxy'z'座標系に変換するには、回転行列をかければよいから、

$$\mathbf{L}_{\omega=\mathbf{e}_{y'}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2ma^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} = 2ma^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin^2 \theta \\ \sin \theta \cos \theta \end{Bmatrix}$$

となる。確かに、y'軸のまわりにこの物体を回そうとすれば、y'軸のまわりにも、またz'軸のまわりにも角運動量が生じることは図から理解できるし、その回転の腕の長さがy'軸のまわりは $\sin \theta$ で、z'軸のまわりは $\cos \theta$ であることも、図を見れば明らかである。

同様に、z'軸のまわりに単位の大さの角速度を与えた（ $\omega = 1 \mathbf{e}_{z'} = \{0, -\sin \theta, \cos \theta\}$ ）場合を考えると、

$$\mathbf{L}_{\omega=\mathbf{e}_{z'}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2ma^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} = 2ma^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin \theta \cos \theta \\ \cos^2 \theta \end{Bmatrix}$$

となる。x軸まわりの場合も、同様の形式で書いておけば、次のとおりである。

$$\mathbf{L}_{\omega=\mathbf{e}_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2ma^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 2ma^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

となる。いま、xy'z'各方向の単位の大さの角速度について考えたから、一般の角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_x \mathbf{e}_x + \omega_{y'} \mathbf{e}_{y'} + \omega_{z'} \mathbf{e}_{z'}\}$ の場合は、

$$\mathbf{L} = \{ \mathbf{L}_{\omega=\mathbf{e}_x} \quad \mathbf{L}_{\omega=\mathbf{e}_{y'}} \quad \mathbf{L}_{\omega=\mathbf{e}_{z'}} \} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{Bmatrix} = I \boldsymbol{\omega}$$

で求まることになる。この式を見れば  $\{L_{\omega=e_x} \quad L_{\omega=e_{y'}} \quad L_{\omega=e_{z'}}\}$  は、慣性テンソルそのものを別の形式に書いたに過ぎないことがわかる。具体的な成分は、上の式3つをまとめて書いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2ma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = 2ma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

となり、これはxyz座標系で表わした慣性テンソルの成分を、 $x'y'z'$ 座標系における成分に変換する式であると了解することができる。この式が、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x^T \\ \mathbf{e}_{y'}^T \\ \mathbf{e}_{z'}^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \{\mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_{y'} \quad \mathbf{e}_{z'}\} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy'} & I_{xz'} \\ I_{y'x} & I_{y'y'} & I_{y'z'} \\ I_{z'x} & I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix}$$

という形に対応していることがわかれば、前に挙げた式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \{\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3\} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

が行列の対角化とともに、慣性乗積がゼロとなる座標系への変換を表していることを了解できるし、 $\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3$  が慣性主軸とよばれる方向をさす単位ベクトルであることもわかるであろう。

一般に、2階のテンソルで表わされる物理量（応力やひずみもそうである）の座標変換（xyz座標系→ $x'y'z'$ 座標系）は、慣性テンソル同様に、以下の式に従う。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{x'}^T \\ \mathbf{e}_{y'}^T \\ \mathbf{e}_{z'}^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \{\mathbf{e}_{x'} \quad \mathbf{e}_{y'} \quad \mathbf{e}_{z'}\} = \begin{bmatrix} I_{x'x'} & I_{x'y'} & I_{x'z'} \\ I_{y'x'} & I_{y'y'} & I_{y'z'} \\ I_{z'x'} & I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix}$$

ここで、 $\{\mathbf{e}_{x'} \quad \mathbf{e}_{y'} \quad \mathbf{e}_{z'}\}$  は、 $x'y'z'$ それぞれの軸方向の単位ベクトルをxyz座標の成分で表わしたものである。ちなみにベクトルで表わされる物理量の座標変換が

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{x'}^T \\ \mathbf{e}_{y'}^T \\ \mathbf{e}_{z'}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \\ u_{z'} \end{pmatrix}$$

変換行列を1つかければ済むのに対して、2階のテンソルは両側からかけなければならないのである。念のため、2次元の場合を具体的に書いておこう。今の問題（yz座標→ $y'z'$ 座標）にあわせてかけば、

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_{y'y'} & I_{y'z'} \\ I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{y'} \\ u_{z'} \end{pmatrix}$$

である。最後の式は、高校で習う式だ。

以上