【 QUIZ ④ 】

流体（主として気体）の流速を計測する装置に熱線流速計（Hot-Wire Anemometer）というものがある。その測定原理に関する次の解説を読んで，下記の設問に答えよ。

【解説】

熱線流速計のセンサ部は，金属の細い線（白金あるいはタングステンで，抵抗値は数Ω）である。金属線に電流を流すとJoule熱が発生してその温度が上昇する。しかし，周囲との温度差が大きくなるほど，周りへの熱の散逸も大きくなるから，結局，熱収支のバランスがとれたところで，金属線は一定の温度を示すことになる。単位時間あたりの発熱量を一定にしておけば，熱平衡状態での金属線の温度が，周囲への熱伝達効率の指標となる。金属線を流れの中においた場合，流速が大きいほど金属線から流体への熱伝達が容易となるから，結果として流速の増大とともに金属線の温度は低くなる。これが，熱線流速計の原理である。

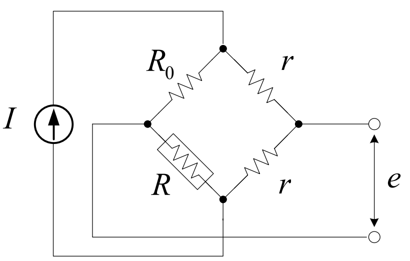
もう少し詳くし検討しよう。温度 T_{f} の流体中においた電気抵抗 R の金属線に電流 I を流したとき，金属線の温度 T_{w} の時間変化は，次の微分方程式で記述できる。

$$c\frac{dT_{\mathrm{w}}}{dt} = RI^2 - k(T_{\mathrm{w}} - T_{\mathrm{f}}) \qquad (1)$$

ここで，c は金属線の熱容量を表す定数であり，また，金属線のごく近傍を除いて流体の温度 T_{f} は一定であるとする。右辺が熱収支を表しており，第1項が単位時間当たりの発熱量を，第2項が強制対流によって流体に奪われる熱量を表す。奪われる熱量は金属線と流体の温度差 $(T_{\mathrm{w}} - T_{\mathrm{f}})$ に比例するが，その比例定数（熱伝達率 k ）は，流速 V との間に次の関係（King's law）をもつ。

$$k = a + b\sqrt{V} \qquad (2)$$

ここで，a，b は正の定数である。投入熱量 RI^2 を一定とするとき，熱平衡状態が達成されたときの金属線の温度 T_{w} を測れば，式(1)から熱伝達率 k を求めることができ，式(2)にもとづいて流速 V が算出できることになる。(A)



実際の熱線流速計において採用される計測の方式には，定電流法と定温度法があるが，いずれにしてもその計測回路の核となるのはブリッジ回路である。センサ部である金属線をブリッジの1辺とする右図のような回路を構成した場合を考える。

定電流法は，通電する電流 I を一定とする方法であるが，抵抗 R が温度 T_{w} によって変わるので，投入熱量は一定でない。抵抗 R と温度 T_{w} の関係は，使用される温度範囲では線形であるとみなそう。

$$R = R_0 + \varDelta R = R_0\left(1 + \alpha\left(T_{\mathrm{w}} - T_0\right)\right) = R_0 + \alpha R_0 \varDelta T \qquad (3)$$

ここで，R_0 は基準温度 T_0 における抵抗値であり，$\alpha > 0$ は定数である。なお，図のブリッジ回路の左上辺の抵抗は，この基準値 R_0 と等しい抵抗値に設定されているものとする。いま，流速 $V = V_0$ のときに，回路の出力が $e = 0$ で一定となるように電流を調整し，そのときの電流値 $I = I_0$ を保持したとする（なお，図の回路の $r >> R_0$ であって，通電電流のほとんどがブリッジの左辺に流れるものとする）。(B)
この状態から，流速が $V = V_0 + \varDelta V$ に変化したときの回路出力 e の動的な応答について考える。まず，流速の変化 $\varDelta V$ はそれほど大きくなく，式(2)は，つぎのように

$$k = k_0 + \varDelta k = k_0\left(1 + \beta\left(V - V_0\right)\right) = k_0 + \beta k_0 \varDelta V \qquad (4)$$

線形近似できるものとする。もちろん，動特性について議論するときには，熱平衡状態が確立していな

いとして，式(1)はそのまま取り扱わねばならない。ただし，$\varDelta V$ による金属線の温度変化 $\varDelta T$，抵抗値の変化 $\varDelta R$，熱伝達率の変化 $\varDelta k$ はいずれも小さく，それらの積に関係する項（2 次の微小項）は無視できるものとする。式（3），（4）を代入して，式(1)を $\varDelta V$ と $\varDelta T$ の関係として書きなおし，$\varDelta R=\alpha R_0\varDelta T$ であることを考慮すると，流速変化 $\varDelta V$ と抵抗変化 $\varDelta R$ の関係を支配する微分方程式は，

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad (5)$$

となる。また，図の回路の出力 e と抵抗変化 $\varDelta R$ の関係は，次式で与えられる。

$$\boxed{\qquad\qquad} \qquad (6)$$

結局，定電流法における流速変化 $\varDelta V$ と回路出力 e の関係は，伝達関数（ラプラス変換領域）で

$$\frac{e}{\varDelta V}(s)=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\tau s+1} \qquad (7)$$

と表現でき，この測定システムが1次遅れ系であることがわかる。ここで，K_{I} は，このシステムのゲイン（周波数ゼロ，すなわち $\varDelta V$ が一定のときの e と $\varDelta V$ の比）であり，τ は，時定数である。

　一方，定温度法は，流速が $V=V_0+\varDelta V$ と変化しても，金属線の抵抗が常に一定 $R=R_0$ になるように，電流値 I を自動的に調整するもので，そのときの電流値 I を測定することで,流速を求める方法である。（以下省略）

【問題】

1）　下線部(A)にしたがって，金属線の温度 T_{w} から流速 V を算出する式を示しなさい。
2）　下線部(B)の状況における流速 V_0 と電流 I_0 の関係を式で示しなさい。
3）　式(4)の k_0 と β を，a,b,V_0 で表しなさい。
4）　式(5)を示しなさい
5）　式(6)を示しなさい
6）　式(7)のゲイン K_{I} と時定数 τ を具体的に示しなさい。
7）　式(7)で表される定電流法の入出力関係について，その周波数特性（振幅特性のみ）の概略を図示しなさい。ただし，図には K_{I} や τ との関係がわかるような記入をしておくこと。

[略解]

1）　平衡状態においては，$\dfrac{dT_w}{dt}=0$ であるから，式(1)において，

$$RI^2=k(T_w-T_f) \quad \rightarrow \quad k=\frac{RI^2}{k(T_w-T_f)}$$

これを式(2)に代入して，　$V=\left(\dfrac{RI^2-a(T_w-T_f)}{b(T_w-T_f)}\right)^2$　と求まる。

2）　ブリッジ出力 $e_o=0$ だから $R=R_0$ となっている。また，式(3)より，$T_w=T_0$ ともなっている。したがって，平衡状態においては，次式が成立する。

$$R_0 I_0^{\ 2} = (a + b\sqrt{V_0})(T_0 - T_f)$$

3) 式(2)より, $k(V) = a + b\sqrt{V}$ であるから, V_0 まわりのテイラー展開による１次近似は,

$$k(V) \cong k(V_0) + \left.\frac{dk}{dV}\right|_{V=V_0}(V - V_0) = (a + b\sqrt{V_0}) + \frac{b}{2\sqrt{V_0}}\Delta V$$

と表せる。これを式(4)最右辺の k_0，βk_0 と比較して,

$$\begin{cases} k_0 = a + b\sqrt{V_0} \\ \beta = \dfrac{b}{2\sqrt{V_0}\,(a + b\sqrt{V_0})} \end{cases}$$

4) まず式(1)を，定電流のもと，(V_0, T_0, R_0) の状態から微小変化した形の式に書くと,

$$c\frac{d}{dt}(T_0 + \Delta T) = (R_0 + \Delta R) I_0^{\ 2} - (k_0 + \Delta k)(T_0 + \Delta T - T_f)$$

これに式(3)，(4)を代入し,

$$c\frac{d}{dt}(T_0 + \Delta T) = (R_0 + \alpha R_0 \Delta T) I_0^{\ 2} - (k_0 + \beta k_0 \Delta V)(T_0 + \Delta T - T_f)$$

$$c\frac{d}{dt}(\Delta T) = R_0 I_0^{\ 2} + \alpha R_0 I_0^{\ 2}\Delta T - k_0 (T_0 - T_f) - k_0 \Delta T - \beta k_0 (T_0 - T_f)\Delta V + \beta k_0 \Delta V \Delta T$$

ここで，第１項と第３項は相殺され,最後の項は,２次の微小量であり無視できる。

$$c\frac{d}{dt}(\Delta T) = (\alpha R_0 I_0^{\ 2} - k_0)\Delta T - \beta k_0 (T_0 - T_f)\Delta V$$

$\Delta T = \Delta R / \alpha R_0$ を代入して，以下の微分方程式を得る。

$$c\frac{d}{dt}(\Delta R) = (\alpha R_0 I_0^{\ 2} - k_0)\Delta R - \alpha\beta k_0 R_0 (T_0 - T_f)\Delta V$$

5) e^+ は常にブリッジ電圧（ブリッジの左辺経路 $R_0 + R$ での電位降下）の半分である

$$e^+ = \frac{1}{2}(R_0 + R_0 + \Delta R) I_0$$

$$e^- = (R_0 + \Delta R) I_0$$

よって， $e = (e^+ - e^-) = -\dfrac{1}{2} I_0 \Delta R$

6) 式(5)をラプラス変換すると

$$\left[sc + (k_0 - \alpha R_0 I_0^{\ 2}) \right] \Delta R(s) = -\alpha\beta k_0 R_0 (T_0 - T_f)\Delta V(s)$$

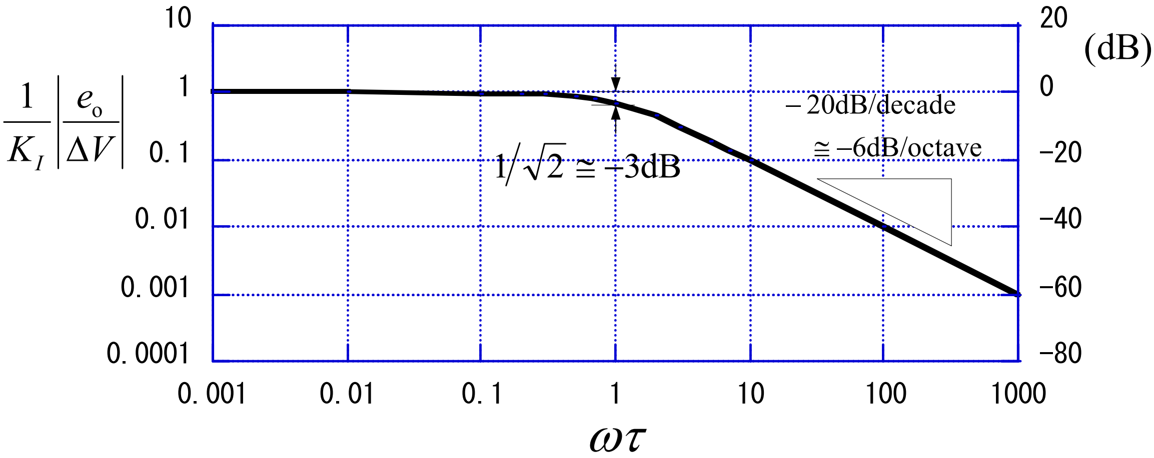
これに式(6)を代入すると，流速変化と電圧出力の関係は,

$$\frac{e}{\Delta V}(s) = \frac{(1/2)\alpha\beta k_0 R_0 I_0 (T_0 - T_f)}{sc + (k_0 - \alpha R_0 I_0^{\ 2})}$$

と求まる。したがって,

$$K_I = \frac{\alpha\beta k_0 R_0 I_0 (T_0 - T_f)}{2(k_0 - \alpha R_0 I_0^{\ 2})}, \qquad \tau = \frac{c}{(k_0 - \alpha R_0 I_0^{\ 2})}$$

7) 一次遅れ系だから,振幅特性の概形は，次のとおり


10
1
0.1
0.01
0.001
0.0001
20
(dB)
0
-20
-40
-60
-80
−20dB/decade
≅−6dB/octave
1/√2 ≅ −3dB
0.001
0.01
0.1
1
10
100
1000
ωτ

—以上—