【 問題 】

マノメータ(manometer :液柱式圧力計)による差圧測定に関する次の解説を読んで，下記の[1]～[6]の設問に答えよ。

【 解説 】

図１に示す管の直径が$2R$のマノメータにおいて，封入された長さLの液体(密度ρ)の運動方程式(液面変位xと圧力差$\Delta p = p_1 - p_2$の関係)は，以下のように表現できる。

$$\frac{4}{3}\pi R^2 L\rho\,\ddot{x} \;=\; \pi R^2 \Delta p - \boxed{\text{(あ)}} - 8\pi L\mu\,\dot{x} \qquad (1)$$

ここで，ドットは時間微分を表し，gは重力加速度，μは液体の粘性係数である。右辺の力の項は，第1項が運動を駆動している圧力差の項であって，第2項は液面変位xが生じたときに働く重力による復元力を表す。また，第3項は液体の粘性にもとづく減衰項である。式(1)は，封入された液体がひとかたまりとしてどのような運動をするかを表したものである(流体のどの部分の変位も液面変位xと同じであるとしている)。したがって，たとえば左辺の慣性項では，管路内の液体の全質量$\pi R^2 L\rho$ではなく，それに4/3をかけたものが，この運動の質量に相当するもの(等価換算質量)となっている。

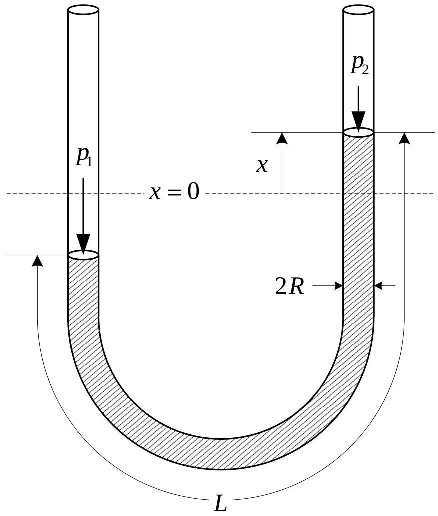

図１ マノメータ

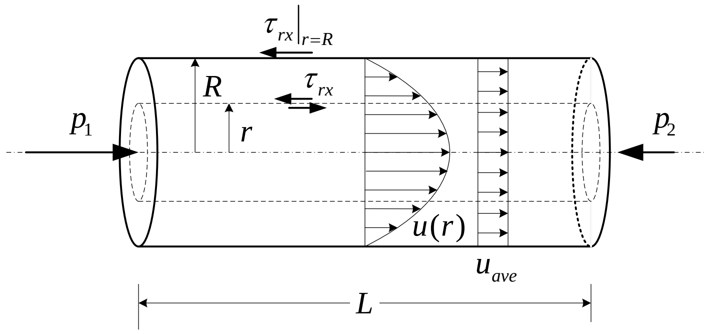

図２ 管路内の定常な流れ

図２は，非圧縮性粘性流体の長さLの管路内の定常な流れを示したものである。Newton流体の場合，管路内の実際の流速uの分布は，半径rの関数として次式で与えられるが，

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2) \qquad (2)$$

式(1)の運動方程式は，(イ) これを図２で示したように等価な一様分布に置き換えて平均流速$u_{ave} = \dot{x}$で表現したものであるといえる。また，各部分でのせん断応力は，次式のとおり，

$$\tau_{rx} = -\mu\frac{du}{dr} \qquad (3)$$

速度勾配に比例する(その比例係数が粘性係数μである)が，(ロ) 式(2)と式(3)から壁面でのせん断応力を計算し，それを平均流速を使って表現すれば，式(1)の右辺第3項が，液体と接している管壁の面積にそのせん断応力をかけたものであることがわかる。

さて，マノメータによる差圧測定にもどり，その動特性を計算しよう。圧力差 Δp と液面変位 x との間の伝達関数は，式(1)のラプラス変換から，

$$\frac{x}{\Delta p}(s) = \frac{K}{s^2/\omega_n{}^2 + 2\varsigma\, s/\omega_n + 1} \qquad (4)$$

と表せる。ここで，$K =$ (い)，$\omega_n =$ (う)，$\varsigma =$ (え) とおいた。 $\varsigma = 0.5$ のときの周波数応答をもとめると，その振幅比と位相差は，次式のとおりとなり，

$$\left|\frac{x}{\Delta p}(i\omega)\right| = \text{(お)}, \qquad \angle\frac{x}{\Delta p}(i\omega) = \tan^{-1}\text{(か)}$$

周波数が非常に低いときや，系の共振周波数に等しいとき，あるいは非常に高い周波数のときは，振幅比や位相差が以下の表のとおりとなることがわかる。

表 1 マノメータの周波数特性

周波数	振幅比	位相差
$\omega \to 0$		
$\omega = \omega_n$	(き)	
$\omega \to \infty$		

【 設問 】

[1] 空欄(あ)に当てはまる式を示しなさい。

[2] 下線部（イ）で述べている平均流速が次式で与えられることを示しなさい。

$$\dot{x} = u_{ave} = \frac{\Delta p}{8\mu L}R^2$$

[3] 下線部（ロ）で述べていることを，具体的に計算によって示しなさい。

[4] 式(4)を導出して，空欄(い)(う)(え)に当てはまる式を示しなさい。

[5] 空欄(お)(か)の式を示しなさい。

[6] (き)の各欄をうめて表 1 を完成させるとともに，振幅特性と位相特性を図で示しなさい。

以上