【 QUIZ ① 】

ある測定系が，次の伝達関数で示される入出力応答を持つ 2 次の線形システムでモデル化できるとき，

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} \qquad (0 \le \varsigma < 1)$$

ランプ波入力 $x_i(t) = \begin{cases} t & (t \ge 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$ に対する応答 $x_o(t)$ を求めなさい。また，定常的な応答遅れが，$\tau = \dfrac{2\varsigma}{\omega_n}$ となること，ならびに，$\varsigma = 0$ の場合の応答が，$\dfrac{x_o(t)}{K} = t - \dfrac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t$ になることを示しなさい。

[略解]

ランプ入力のラプラス変換は，

$$X_i(s) = L[x_i(t)] = L[t] = \frac{1}{s^2}$$

であるから，応答出力のラプラス変換は，

$$X_o(s) = H(s)X_i(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{K\omega_n^2}{(s+\varsigma\omega_n)^2 + (1-\varsigma^2)\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s^2}$$

となる。これを部分分数に分けると，

$$\frac{X_o(s)}{K} = \frac{2\varsigma/\omega_n\cdot(s+\varsigma\omega_n)}{(s+\varsigma\omega_n)^2 + (1-\varsigma^2)\omega_n^2}\cdot + \frac{2\varsigma^2 - 1}{(s+\varsigma\omega_n)^2 + (1-\varsigma^2)\omega_n^2} + \frac{-2\varsigma/\omega_n}{s} + \frac{1}{s^2}$$

となるから，変換表に照らして逆変換すれば，応答は，

$$\frac{x_o(t)}{K} = e^{-\varsigma\omega_n t}\left[\frac{2\varsigma}{\omega_n}\cos\omega_n' t + \frac{2\varsigma^2-1}{\omega_n'}\sin\omega_n' t\right] - \frac{2\varsigma}{\omega_n} + t \qquad (\mathrm{t} > 0)$$

と求まる。なお，ここで $\omega_n' = \sqrt{1-\varsigma^2}\,\omega_n$ とおいた。

定常状態，すなわち十分時間がたてば，指数関数のかかる項は十分小さくなるから，

$$\frac{x_o(t)}{K} \cong t - \frac{2\varsigma}{\omega_n}$$

となって，出力は入力に対して一定の遅れをもつことがわかる。また，$\varsigma = 0$ のときの応答は，

$$\frac{x_o(t)}{K} = t - \frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t$$

である。